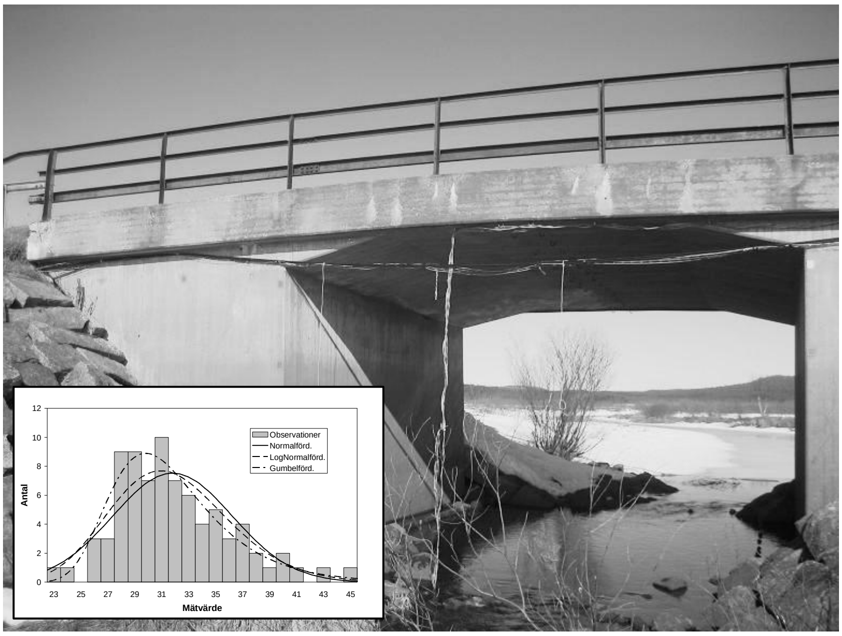
ProDevelopment

Teknisk utveckling & expertstöd

Teknisk Rapport 2009:02

Handledning för sannolikhetsteoretisk dimensionering enligt Eurokod



Claes Fahleson

Sofia Utsi

ProDevelopment i Sverige AB

Storgatan 7
971 38 LULEÅ

www.prodevelopment.se

Förord

För verifikation av bärverks säkerhet används idag uteslutande partialkoefficientmetoden, det gäller såväl den nationella regelsamlingen *Boverkets konstruktionsregler, BKR*, som de europeiska beräkningsreglerna för bärande konstruktioner, *Eurokoderna*.

I både *BKR* och *eurokoderna* är huvudregeln att en byggnads eller ett konstruktionselements säkerhet mot brott eller olägenhet ska verifieras med partialkoefficientmetoden, men som alternativ ges även möjlighet att använda sannolikhetsteoretiska metoder.

Denna handledning sammanfattar de gällande svenska och europeiska regelverk som behandlar dimensionering med sannolikhetsteoretiska metoder. Vidare ges en komprimerad sammanfattning av grunderna till metoden och en presentation av typiska karakteristika för de ingående stokastiska (slumpmässiga) variablerna.

I kapitel 4 presenteras de delar från SS-EN 1990 som behandlar dimensionering genom provning.

Handledningen har tagits fram på uppdrag av Skanska Sverige AB som en del i SBUF-projekt 11809, Robustare och kostnadseffektivare stomkonstruktioner genom sannolikhetsteoretisk dimensionering.

Luleå 2009-05-04

Claes Fahleson & Sofia Utsi
ProDevelopment i Sverige AB

INNEHÅLL

1 INLEDNING

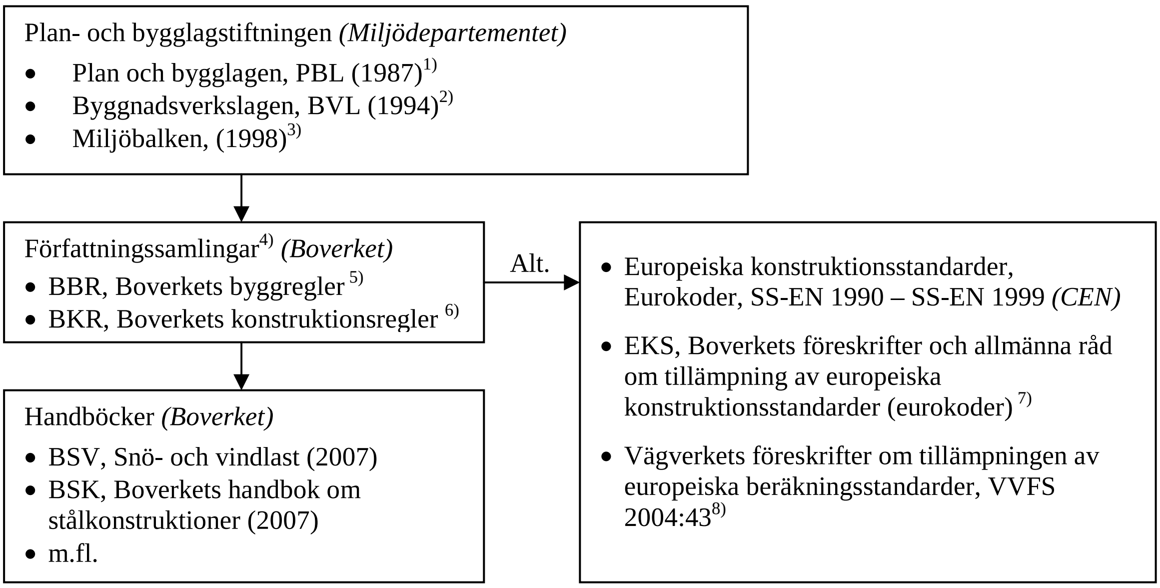
Konstruktionsberäkningar är ett nödvändigt hjälpmedel vid utformning av en konstruktion. I första hand används beräkningarna som en verifikation av att konstruktionen uppfyller de krav som ställs i gällande nationella regelverk. Beräkningarna utgör även under konstruktionens hela användningstid en viktig del av dokumentationen av tankegången bakom konstruktionens utformning.

Regelverkens krav är satta så att konstruktionen ska vara säker under hela användningstiden. Detta krav kan även beskrivas av den komplementära händelsen, att risken för allvarliga skador eller brott ska vara mycket liten.

1.1 Regelverk

I Sverige är det Boverket som på uppdrag av regeringen handhar ansvaret för verksamhet kopplad till byggnation. Boverket är en förvaltningsmyndighet underställd Miljödepartementet. De övergripande lagarna ges i *Plan- och bygglagstiftningen* och regleras genom ett antal författningssamlingar (regelverk), bland annat BBR och BKR.

Parallellt med dessa regelverk kan nu de europeiska konstruktionsstandarderna, Eurokoderna, användas. Då EU-medlemsstaternas övergripande bygglagstiftning inte ännu är harmoniserad kan man inte i Eurokoderna anges vilka säkerhetsnivåer som ska gälla. De föreskrivande myndigheterna åläggs emellertid att anpassa sina regler så att Eurokoderna kan användas genom att ange värden för de nationellt valda parametrarna, NDP. I flertalet Eurokoder anges dessa i den nationella bilagan, NA. Boverket och Vägverket ansvarar för genomförandet.



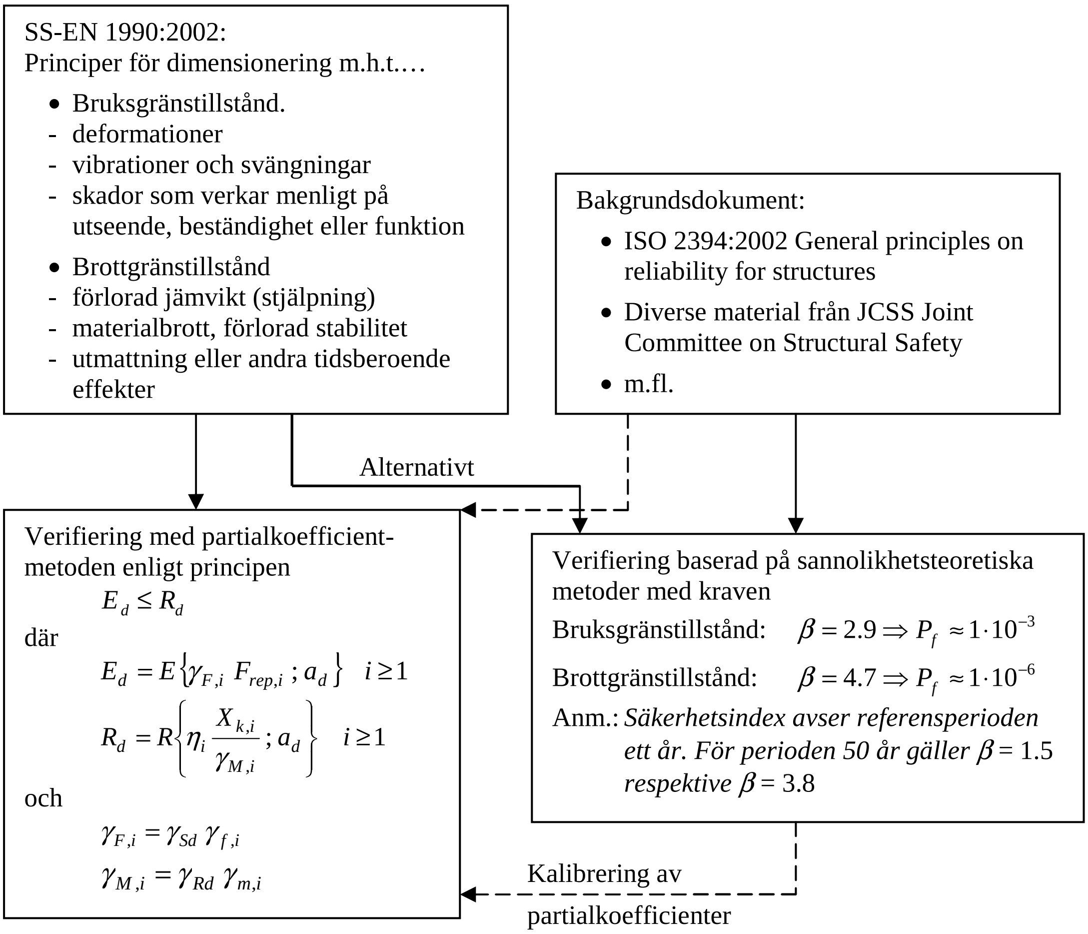
1) Med ändringar t.o.m. SFS 2008:1366 (Svensk författningssamling)
2) Med ändringar t.o.m. SFS 2007:457
3) Med ändringar t.o.m. SFS 2008:1406
4) Författningar är ett gemensamt namn för lagar, förordningar och föreskrifter.
5) Med ändringar t.o.m. BFS 2008:20
6) Med ändringar t.o.m. BFS 2008:7
7) Med ändringar t.o.m. BFS 2009:6
8) Med ändringar t.o.m. VVFS 2008:400

Figur 1: Svenska regelverk för byggnadskonstruktion

Eurokoderna innehåller metoder för att verifiera byggnadsverks och enskilda byggnaders bärförmåga, stadga och beständighet samt deras funktionsduglighet då de utsätts för brand.

Idag är det alltså tillåtet att använda antingen BKR’s eller Eurokodernas beräkningsregler. Från årsskiftet 2010-2011 tillåts endast Eurokoderna.

Eurokoden SS-EN 1990 [2] ger grundläggande dimensioneringsregler för bärverk och är tänkt att tillämpas tillsammans med de övriga eurokoderna. Standarden innehåller bindande *principer*, som består av allmänna utsagor och definitioner där det inte finns något alternativ samt krav och analytiska modeller där inga alternativ tillåts såvida detta inte särskilt anges, och vägledande *råd*, som består av allmänt vedertagna regler som harmonierar med principerna och som uppfyller kraven i dessa. Kravet är att bärverket ska kontrolleras för bruksgräns- och brottgränstillståndet. I Eurokoden ges detaljerade anvisningar för hur dessa verifikationer kan ske med partialkoefficientmetoden. SS-EN 1990 ger även möjlighet att dimensionera med hjälp av sannolikhetsteoretiska metoder, se figur 2.



Figur 2: Principer för dimensionering och metoder för verifiering enligt SS-EN 1990.

De säkerhetskrav som ska uppfyllas vid en sannolikhetsteoretisk dimensioneringsmetod ges av figur 2. Huvudkraven är i stort sett identisk med BKR’s krav och där kravet på säkerhetsindexet för brottgränstillståndet motsvarar säkerhetsklass 3.

I bilagor till SS-EN 1990 behandlas dimensionering genom provning, dvs. metoder för bestämning av enskild statistisk egenskap och för statistisk bestämning av bärförmågemodell Vidare ges en metod för kalibrering av partialkoefficienter.

2 GRUNDLÄGGANDE SANNOLIKHETSTEORI

Vid sannolikhetsteoretisk dimensionering betraktas lasteffekt, *E*, och bärförmåga, *R*, som stokastiska (slumpmässiga) variabler definierade av deras frekvensfunktioner. Det innebär således att det inte finns någon övre eller nedre gräns för varken lasteffekt eller bärförmåga, utan endast en sannolikhet att variabeln antar ett värde.

Gränsfunktionen, *g*, definieras av händelsen då lasteffekten *E* är lika stor som bärförmågan *R*

$$g = R - E$$

g är en stokastisk variabel och sannolikheten att detta gränstillstånd uppnås ges av

$$P_f = \text{Prob}(g \leq 0)$$

Värdet P_f benämns vanligtvis brottsannolikheten och tar i de flesta fall ett mycket litet värde. För att illustrera sannolikheten på ett tydligare sätt så används med fördel det ekvivalenta säkerhetsindexet β som ges av

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$$

Där $\Phi^{-1}()$ är inversen av den standardiserade kumulativa normalfördelningen.

Normalt är både lasteffekten, *E*, och bärförmågan, *R*, funktioner bestående av flera variabler, både stokastiska och deterministiska, och kan uttryckas som

$$E = f_E\{F_1, F_2, \ldots a_1, a_2, \ldots \theta_1, \theta_2, \ldots\}$$

$$R = f_R\ \{X_1, X_2, \ldots a_1, a_2, \ldots \theta_1, \theta_2, \ldots\}$$

där

f_E {} och f_R {} är lasteffekt- respektive bärförmågefunktion

F är en last

X är en materialegenskap

a är en geometrisk egenskap

θ är en modellosäkerhet

I många fall blir gränsfunktionen *g* en komplicerad ickelinjär stokastisk funktion med många variabler vilket gör det mycket komplicerat att finna exakta analytiska lösningar. En allmänt accepterad beräkningsmetod som innebär en del förenklingar är första ordningens tillförlitlighetsmetod, FORM. Denna metod presenterades först av *Hasofer och Lind* [4] och metoden sammanfattas i det följande.

För att enklare illustrera beräkningsmetoden antas att gränsfunktionen *g* endast består av två stokastiska variabler där X_1 är normalfördelad (last) och där X_2 lognormalfördelad (bärförmåga) enligt

$$g = X_2 - X_1$$

$$X_1 \in N(m_{X1}, \sigma_{X1})$$

$$\ln X_2 \in N(m_{\ln X2}, \sigma_{\ln X2})$$

Vidare gäller att

$$V_{X1} = \frac{\sigma_{X1}}{m_{X1}}$$

$$V_{X2} = \frac{\sigma_{X2}}{m_{X2}}$$

$$m_{\ln X2} = \ln\left[\frac{m_{X2}}{\sqrt{V_{X2}+1}}\right]$$

$$\sigma^2_{\ln X2} = \ln\left(V^2_{X2}+1\right)$$

Vid andra typer av fördelningar som t.ex. *gumbelfördelning* måste fördelningsfunktionen transformeras till normalfördelning med avseende på den aktuella brottpunkten på gränsytan. För fördjupning inom detta område hänvisas till litteraturen, t.ex. [7].

Först normaliseras de stokastiska variablerna genom att i gränsfunktionen ersätta de med

$$Z_i = \frac{X_i - m_{Xi}}{\sigma_{Xi}} \Leftrightarrow X_i = \sigma_{Xi} \cdot Z_i + m_{Xi} \quad \Rightarrow \quad Z_i \in N(0,1)$$

Den normaliserade stokastiska gränsfunktionen ges av

$$g = \frac{m_{X2}}{\sqrt{V^2_{X2}+1}} \cdot e^{Z2\cdot\sqrt{\ln(V^2_{X2}+1)}} - \sigma_{X1} \cdot Z_1 - m_{X1}$$

Funktionen innehåller nu två normalfördelade stokastiska variabler med medelvärdet 0 och standardavvikelsen 1. Genom normaliseringen erhålls en ickelinjär funktion för gränsfunktionen, även benämnd brottytan. I figur 3 illustreras sambandet mellan de normaliserade variablerna och gränsfunktionen.

Den icke linjära brottfunktionen kan approximeras som en linjär funktion $g^*(z_1,z_2) = 0$ som tangerar den verkliga funktionen i brottpunkten (z_{1d}, z_{2d}), se figur 3. I de flesta fall ger denna approximation ett resultat som ligger mycket nära den brottrisk som ges av den exakta funktionen.

Med antagandet om att gränsytan ges av en linjär funktion kan man med geometriska villkor direkt bestämma säkerhetsindex β och därmed även brottrisken.

Säkerhetsindex β motsvarar i figuren det kortaste avståndet från origo till brottpunkten där Z_1 och Z_2 tar värdena z_{1d} respektive z_{2d} . Dessa brottvärden motsvaras av

$$z_{1d} = \alpha_1 \cdot \beta$$

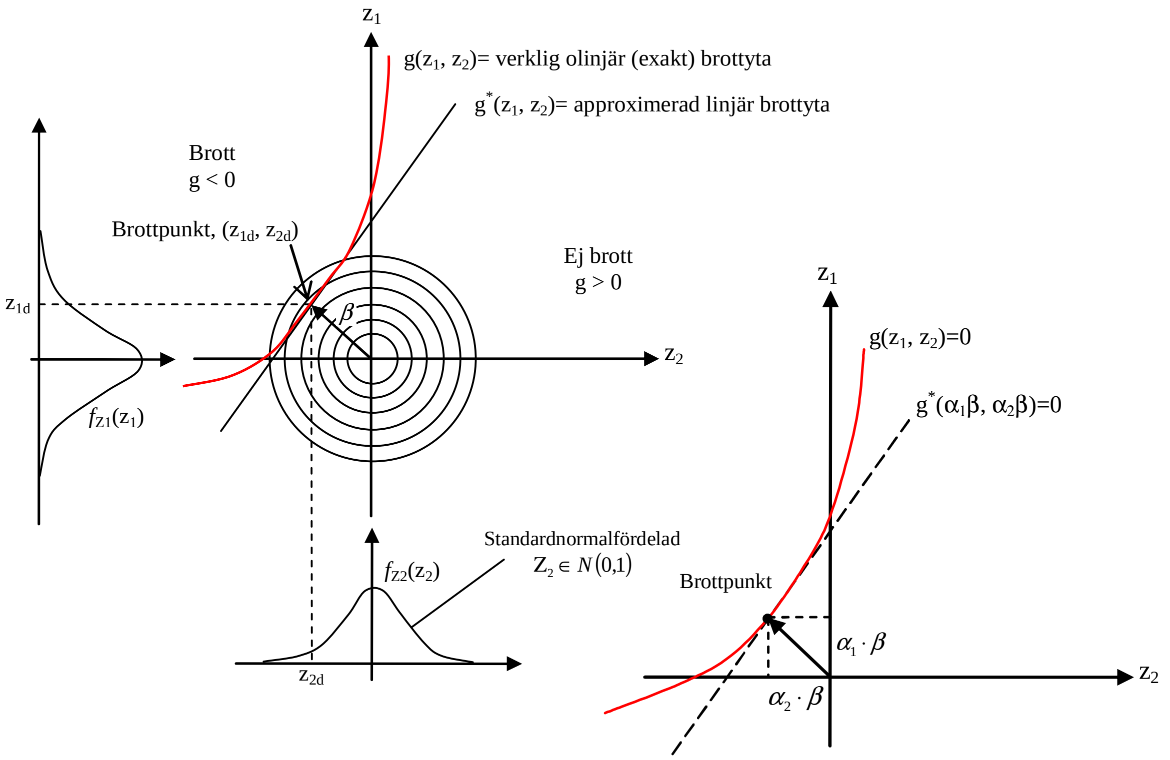
$$z_{2d} = \alpha_2 \cdot \beta$$

där α_1 och α_2 komposanterna till enhetsvektorn α. Vidare gäller att

$$-1 \le \alpha_i \le 1$$

$$\sum \alpha_i^2 = 1$$

I detta sammanhang kallas komposanterna för känslighetsfaktorer och de beskriver indirekt vilket värde den aktuella stokastiska variabeln tar då brottet sker, dvs. variabelns dimensioneringsvärde.



Figur 3: Normaliserade variabler med en ickelinjär brottfunktion samt en approximerad linjär funktion.

Dimensioneringsvärdena för de två stokastiska variablerna X_1 och X_2 ges således av

$$X_{d1} = m_{X1} \cdot (1 + \alpha_1 \cdot \beta \cdot V_{X1})$$

$$X_{d2} = \frac{m_{X2}}{\sqrt{V_{X2}^2 + 1}} e^{\alpha_2 \beta \sqrt{\ln\left(V_{X2}^2+1\right)}} \approx \left\{ \begin{matrix} om \\ V_{X2} < 0.2 \end{matrix} \right\} = m_{X2} \cdot e^{\alpha_2 \beta \cdot V_{X2}}$$

För normalfallet i gränstillståndet är både lasteffekten, E_d, och bärförmågan , R_d, funktioner bestående av flera variabler, både stokastiska och deterministiska, och kan uttryckas som

$$E_d = f_E\{F_{d1}, F_{d2}, \ldots a_{d1}, a_{d2}, \ldots \theta_{d1}, \theta_{d2}, \ldots\}$$

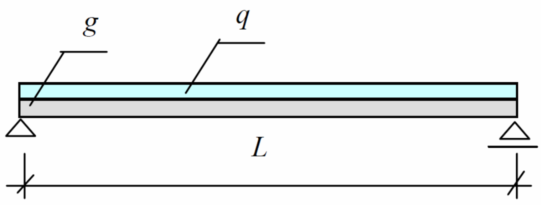
$$R_d = f_R\ \{X_{d1}, X_{d2}, \ldots a_{d1}, a_{d2}, \ldots \theta_{d1}, \theta_{d2}, \ldots\}$$

Dock gäller samma principer för det tvådimensionella fallet.

Att analytiskt beräkna säkerhetsindex och känslighetsfaktorer blir snabbt mycket komplicerat då antalet variabler ökar och om gränsfunktionen samtidigt är en ickelinjär funktion. Idag finns det dock en hel del beräkningsprogram att tillgå som underlättar arbetet, t.ex. VaP 2.3 (Petschacher Software und Project, Ltd) eller Comrel V.8 (RCP Consult GmbH).

I figur 4 ges ett exempel på en FORM analys av en stålbalk. Exemplet är hämtat från JCSS, *Probabilistic Model Code*, [6].

I tabellen för indata framgår att några av de variabler som beskriver geometriska storheter har antagits deterministiska. De två högra kolumnerna anger vilken fraktil de nyttiga lasternas fördelningsfunktion representerar (5-års maximum och 1-års maximum) och vilken varaktighet de har då de uppträder. Observera att de nyttiga lasterna har antagits ha fördelningsfunktioner representerade av gammafördelning samt exponentialfördelning.



Basic variable	Sym-bol	Distr. type	Dimen-sion	Mean	Standard deviation	V	λ	ρ
Yield strength	f_y	lognormal	MPa	280	19.6	0.07		
Span of the beam	L	determin.	m	5	-			
Section modulus	W	determin.	m^3	param.	-			
Concrete density	γ_{con}	normal	MN/m^3	0.024	0.00096	0.04		
Slab depth	h	normal	m	0.25	0.01	0.04		
Distance of beams	d	determin.	m	3	-			
Imposed long-term load categ. D	q_{lt}	gamma	kN/m^2	0.9	2.15		0.2/year	perm.
Imposed short-term load categ. D	q_{st}	exponenc.	kN/m^2	0.4	1.42		1/ year	14/365
Uncertainty of resistance	θ_R	lognormal	-	1	0.05	0.05		
Uncertainty of load effect	θ_E	lognormal	-	1	0.2	0.2		

Figur 4: Indata till beräkningsexempel för en stålbalk, från [6].

I analysen varierades den deterministiska variabeln W så att olika β-värden erhölls. I figur 5 visas resultaten för känslighetsfaktorerna då $\beta = 3.8$ vilket motsvarar eurokodens krav för den aktuella referensperioden 50 år.

Basic variable	Sensit. factor α	Basic variable	FORM. factor α
imposed load q_{st}	-0.06	uncertainty of load θ_E	-0.33
imposed load q_{lt}	-0.92	yield strength f_y	0.16
resistance uncert. θ_R	0.11	concrete density	-0.01

Figur 5: Beräkningsresultat till beräkningsexempel hämtat från [6].

De känslighetsfaktorer som kan kopplas till balkens bärförmåga tar positiva värden medan de som hör till lastsidan tar negativa värden.

Variablerna med störst påverkan är den nyttiga lasten (långtid) och osäkerheten på lastsidan. På bärförmågesidan bidrar till viss del variationen i sträckgräns.

Känslighetsfaktorn för betongens densitet är mycket liten. Om man hade antagit densiteten som deterministisk och utfört samma analys skulle säkerhetsindex förbli i stort sett oförändrat.

3 LASTER, MATERIAL, GEOMETRI OCH OSÄKERHETER

3.1 Laster

Laster klassificeras med hänsyn till deras variation i tiden enligt följande:

- Permanenta laster, t.ex. egentyngd, förspänning, krympning, krypning.
- Variabla laster, t.ex. nyttig last, vindlast, snölast, trafiklast, temperaturlast.
- Olyckslaster, t.ex. explosion, påkörningslast.

I tabellen nedan ges en sammanställning av några vanliga lasters statistiska egenskaper.

Tabell 1: Typiska statistiska egenskaper för några vanliga laster. Informationen är främst hämtad från [6] och [8].

Last	*Fraktil för karakt. värde*[1)]	*Passande fördelning*[2)]	*Var.koef., V = m/σ*	*Anm.*
Egentyngd, G	Normalt 50 %	N	0.05 - 0.10	Se ref. [2]
Nyttig last (kontor)	> 98 %	GU, LN	0.40 - 0.70	
Snölast	98 %	GU	0.25 - 0.40	Den lägre *V* gäller i områden med större snölast
Vindlast	98 %	GU	0.40	Ibland används frechetfördelning

1) Fraktil för fördelning av årsmaximum
2) N avser normalfördelning, LN lognormalfördelning och GU gumbelfördelning (typ-I-fördelning)

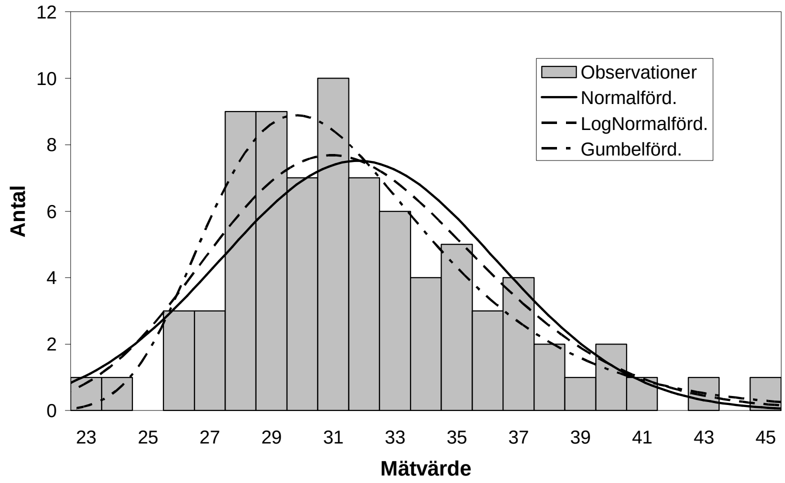
Den andra kolumnen anger på vilket sätt den aktuella lastens karakteristiska värde presenteras i Eurokoden. En last kan ha statistiska egenskaper som gör att den beskrivs väl av flera olika typer av fördelningar. I den tredje kolumnen ges den fördelning som vanligtvis används för att beskriva den aktuella lasten.

Permanenta laster som egentyngd brukar vanligtvis antas ha en *normalfördelning*.

För variabla laster där lasten beskrivs av frekvensfunktion för lastens maxvärde används ofta *gumbelfördelning*. Det gäller t.ex. frekvensfunktionen för snölastens maxvärde. Denna typ av fördelning, även benämnd *typ-1 fördelning*, tillhör en familj fördelningar som kallas extremvärdesfördelningar. De har den gemensamma egenskapen att de är skeva fördelningar och att de bildas av extremvärden från andra fördelningar då de i sin tur beskriver en ny fördelning. *Frechetfördelning* (typ-II fördelning) är också en sådan extremvärdesfördelning som ibland används för att beskriva vindlast.

Det finns metoder för att analysera vilken fördelning som beskriver statistiska data på bästa sätt. I det följande ges ett exempel.

EXEMPEL: Under en lång tid har lastvärden kontinuerligt registrerats. Hela mätserien delas in i lämpliga och lika långa tidsintervall och maxvärdet för varje intervall bestäms. Totalt erhålls 80 lastvärden, varierande mellan 23 och 45 kN, se histogrammet i figur 6.



Figur 6: Histogram av mätta lastvärden och exempel på frekvensfunktioner.

Analys av mätdata ger

skattat medelvärde: $\mu_Q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i = 31.9\,\text{kN}$

skattad standardavvikelse: $s_Q = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Q_i - \mu_Q)^2} = 4.25\,\text{kN}$

och variationskoefficient: $V_Q = \frac{s_Q}{\mu_Q} = 0.133$

Mätvärden sorteras i stigande ordning och medianrang för varje observation beräknas enligt

$$m_i = \frac{i}{n+1} \quad , \; 0 < m_i < 1$$

Där *i* är den aktuella observationen i storleksordning och *n* antalet observationer. För medianrang beräknas inversen för den kumulativa fördelningen. Det beräknade värdet motsvarar ett förväntat lastvärde på den aktuella fördelningen. Genom att plotta de förväntade lastvärdena mot de observerade lastvärdena får man en god uppfattning av den antagna fördelningsfunktionens överensstämmelse med observationerna, se figur 7.

Observationerna har kontrollerats mot två olika fördelningar, dels mot normalfördelning och dels mot gumbelfördelning vars fördelningsfunktion och frekvensfunktion beskrivs av följande uttryck.

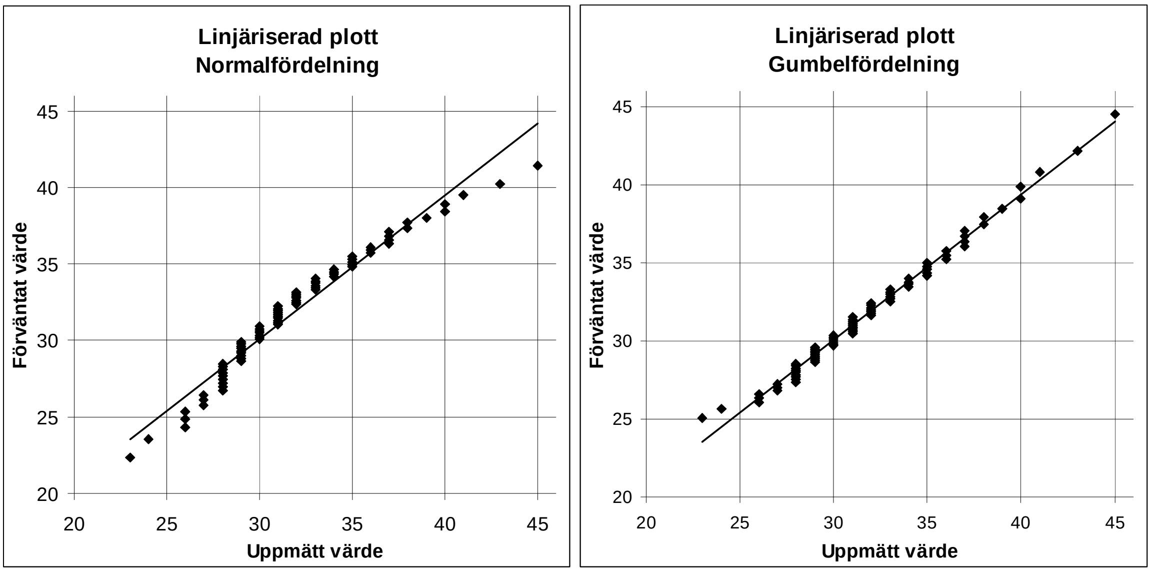
$$F_Q(q) = e^{-e^{-a(q-U)}}$$

$$f_Q(q) = a\,e^{-a(q-U)} \cdot e^{-e^{-a(q-U)}}$$

där

$$U = \mu_Q - \frac{0.57722}{a}$$

$$a = \frac{\pi}{s_Q\sqrt{6}}$$



Figur 7: Uppmätt värde plottat mot förväntat värde för normalfördelning och för gumbelfördelning.

Överensstämmelsen mot gumbelfördelningen är bra medan normalfördelningen har sämre överensstämmelse. För låga och höga lastvärden i normalfördelningsplotten avviker de uppmätta värdena mot de förväntade. Om lasten representeras av normalfördelningsfunktionen blir resultatet att de extrema lastvärdena underskattas, vilket även framgår av figur 6 där frekvensfunktionerna för dessa två fördelningar samt för en lognormalfördelning har lagts in i histogrammet.

3.2 Material

Det är svårt att ge allmängiltig statistisk information för materialegenskaper då en materialtyp kan ha extremt olika egenskaper, t.ex. beroende på tillverkningsförutsättningar eller materialets strukturella uppbyggnad. I tabell 2 ges dock egenskaper för några typiska material.

Tabell 2: Några typiska materialegenskaper, se bl.a. [1], [6] och [8]

Material/ materialparameter	*Passande fördelning*	*Medelvärde,* m [1)]	*Var.koeff.* V	*Anm.*
Limträ				
• böjspänning	LN	-	0.15	
Stål				
• sträckgräns [2)]	LN	$k \cdot R_{eH}^{nom} - 20$	0.07	k = 1.1 till 1.2
• brottgräns [2)]	LN	$B \cdot R_m^{nom}$	0.04	B = 1.1 till 1.5
• elasticitetsmodul	LN	E^{nom}	0.03	
Betong				
• tryckhållfasthet	LN	$0.85 \cdot f_{c,cube}$	0.05–0.15	
Armering				
• tvärsnittsarea	N	A^{nom}	0.02	
• sträckgräns	N	$R_{eH}^{nom} + 2 \cdot \sigma$	σ / m	σ = 30 MPa

1) Index *nom*. avser nominella värden.
2) För stål enlig SS-EN 10025. Enhet i MPa, medelvärdet är beräknat enligt de gränser som ges i [6]

Normalt är det enkelt att bestämma egenskaper hos ett material och det finns därför mycket statistisk information att hämta från tidigare gjorda provningar. Dessvärre finns inte denna information samlad gemensamt utan den måste hittas från fall till fall, t.ex. hos tillverkare.

Generellt gäller för ett materials hållfasthetsegenskap att den för det mesta beskrivs bra av en lognormalfördelning. För material med en stor variationskoefficient har denna skeva fördelning fördelen att den inte kan ta negativa värden, vilket för en hållfasthet är en orimlighet.

3.3 Geometri

I tabell 3 ges statistisk information för geometriska egenskaper för stål, betong samt för excentricitet, krokighet och snedställning för pelare.

Ofta kan statistisk information rörande geometriska avvikelser uppskattas hyfsat med ingenjörsmässiga bedömningar.

Tabell 3: Geometriska egenskaper. Informationen är främst hämtad från [6] och [8].

Dimension	*Passande fördelning*	*Medelvärde, m*	*Var.koeff. V*	*Anm*
Betong				
• yttre dimensioner	N	$1.003 \cdot X^{nom}$	$0.006 + 4/\ X^{nom}$	$X^{nom} \leq 1000$ mm
• effektiv höjd	N	$d^{nom} + 10$	$10/\ d^{nom}$	
Valsad stålbalk				
• höjd (IPE 80-200)	N	h^{nom}	$1/\ d^{nom}$	
• area	N	A^{nom}	0.03	
• böjmotstånd	N	W^{nom}	0.04	
Excentricitet, krokighet och snedställning för en tryckt pelare				
• excentricitet, e	N	0	0.001	
• krokighet, f	N	0	0.001	
• snedställning, ϕ	N	0	0.0015	

1) Index *nom* avser nominella värden.

I många fall har denna typ av variabel liten påverkan på en konstruktions säkerhet. Vid sannolikhetsteoretiska analyser erhåller vanligtvis de variabler som beskriver geometriska egenskaper känslighetsfaktorer som är väldigt små. Därför låter man, i sannolikhetsteoretiska analyser, ofta geometriska egenskaper representeras av deterministiska storheter.

3.4 Modellosäkerheter

En gränsfunktion som används för sannolikhetsteoretisk verifiering är en matematisk funktion, beräkningsmodell, bestående av flera variabler som beskriver sambandet mellan last, material och geometriska storheter. Denna funktion ger i normalfallet inte en helt exakt överensstämmelse med verkligheten vilket beror på modellosäkerheter.

Modellosäkerheter kommer av slumpmässiga variationer som försummats i modellen samt av förenklingar mellan de matematiska sambanden. I vissa fall kopplas även osäkerheterna samman med brottyp och kontroll, se t.ex. [9].

Vanligtvis delas modellosäkerheterna in i osäkerheter för beräkning av lasteffekt, θ_E, och osäkerheter för beräkning av bärförmåga, θ_R, och kopplas till respektive funktion enligt uttrycken

$$E = \theta_E + f_E\{F_1, F_2,... a_1, a_2,...\}$$

$$R = \theta_R + f_R\{X_1, X_2,... a_1, a_2,...\}$$

för normalfördelade osäkerhetsvariabler.

Vanligtvis antas osäkerhetsvariabler representeras av lognormalfördelning vilket ger funktionerna

$$E = \theta_E\, f_E\{F_1, F_2,... a_1, a_2,...\}$$

$$R = \theta_R\, f_R\{X_1, X_2,... a_1, a_2,...\}$$

I tabell 4 ges rekommenderade modellosäkerheter för olika beräkningsmodeller, från [6].

Tabell 4: Rekommenderade modellosäkerheter enligt JCSS, se [6]

Beräkningsmodell	Fördelning	Medelvärde	Var.koeff.
För beräkning av lasteffekt			
• moment i bärverkselement	LN	1.0	0.1
• normalkraft i bärverkselement	LN	1.0	0.05
• skjuvkraft i bärverkselement	LN	1.0	0.1
• moment i plattelement	LN	1.0	0.2
• krafter i plattelement	LN	1.0	0.1
• spänningar i 2D solidelement (FEM)	N	0.0	0.05
• spänningar i 3D solidelement (FEM)	N	0.0	0.05
För beräkning av bärförmåga, stålkomponenter			
• böjmoment inkl normal- och tvärkraft	LN	1.0	0.05
• tvärkraft	LN	1.0	0.05
• svetsförband	LN	1.15	0.15
• skruvförband	LN	1.25	0.15
För beräkning av bärförmåga, betongkomponenter			
• böjmoment inkl normal- och tvärkraft	LN	1.2	0.15
• tvärkraft	LN	1.4	0.25
• förband	LN	1.0	0.1

I SS-EN 1990 ges en metod att bestämma och kalibrera bärförmågemodeller genom att beräkna en korrektionsfaktor *b* och en variationskoefficient för feltermen, V_δ. Denna faktor och denna koefficient kan jämföras med modellosäkerhetens medelvärde och variationskoefficient då osäkerhetsvariabeln är lognormalfördelad.

4 TILLÄMPNING AV SS-EN 1990

4.1 Allmänt

I den informativa bilagan C i SS-EN 1990 ges en översiktlig sammanfattning av bakgrunden till och grunderna för partialkoefficientmetoden.

Bland annat ges en förenklad metod att bestämma dimensioneringsvärden för lasteffekter och bärförmågor. Denna metod är på säkra sidan då den generellt ger något för stora ingångsvärden för känslighetsfaktorerna.

I standarden sägs att den dimensionerande lasteffekten och den dimensionerande bärförmågan får bestämmas med antagandet att

$$\alpha_E = -0.7$$

$$\alpha_R = 0.8,$$

dock med förutsättningen att

$$0.16 < \sigma_E / \sigma_R < 7.6.$$

Uppfylls inte detta villkor gäller att α = +/- 1 för den med störst standardavvikelse och α = +/- 0.4 för den med mindre standardavvikelse.

För fallet med flera variabla laster kan den andra lastens (inte huvudlast) känslighetsfaktor antas vara

$$\alpha_{E2} = -0.4 \cdot 0.7 = -0.28.$$

Dimensioneringsvärdet beror av aktuell fördelningsfunktion. I tabellen nedan sammanfattas de vanligaste fördelningarna.

Tabell 5: Formler för bestämning av dimensioneringsvärde för olika fördelningar.

Fördelning	*Dimensioneringsvärde*	*Anm.*
N	$X_d = m_X(1-\alpha\beta \cdot V_X)$	
LN	$X_d = \frac{m_X}{\sqrt{V_X^2+1}} e^{-\alpha\beta\sqrt{\ln\left(V_X^2+1\right)}}$ $\approx \begin{Bmatrix} om \\ V_X < 0.2 \end{Bmatrix} = m_X \cdot e^{-\alpha\beta \cdot V_X}$	
GU	$X_d = U - \frac{1}{a}\ln\{-\ln(\Phi(-\alpha\beta))\}$ Φ är den kumulativa standard-normalfördelningsfunktionen	$U = m_X - \frac{0.57722}{a}$ $a = \frac{\pi}{\sigma_X\sqrt{6}}$

För känt medelvärde och standardavvikelse används beteckningarna m_X och σ_X medan för skattat medelvärde och skattad standardavvikelse används beteckningarna μ_X och s_X.

EXEMPEL: Bestäm dimensioneringsvärdet för den last som analyserades i kapitel 3.1. Antag vidare att varje observation av de 80 mätvärdena motsvarar lastens årsmaximum. Vid analysen av de 80 mätvärdena fann vi att

$\mu = 31.9$ kN

$s = 4.25$ kN

$V = s / \mu = 0.133$

För de tre olika fördelningarna erhålls med den beskrivna metoden följande dimensionerande last baserat på säkerhetsindex $\beta = 4.7$ (årsbasis)

N: $E_d = 31.9 \cdot (1 + 0.7 \cdot 4.7 \cdot 0.133) = 45.5$ kN

LN: $E_d = 31.9 e^{(0.7 \cdot 4.7 \cdot 0.133)} = 48.9$ kN

GU: $\{U = 30.0, a = 0.30\}$, $E_d = 30.0 - \frac{1}{0.30} \ln[-\ln(\Phi(0.7 \cdot 4.7))] = 55.1$ kN

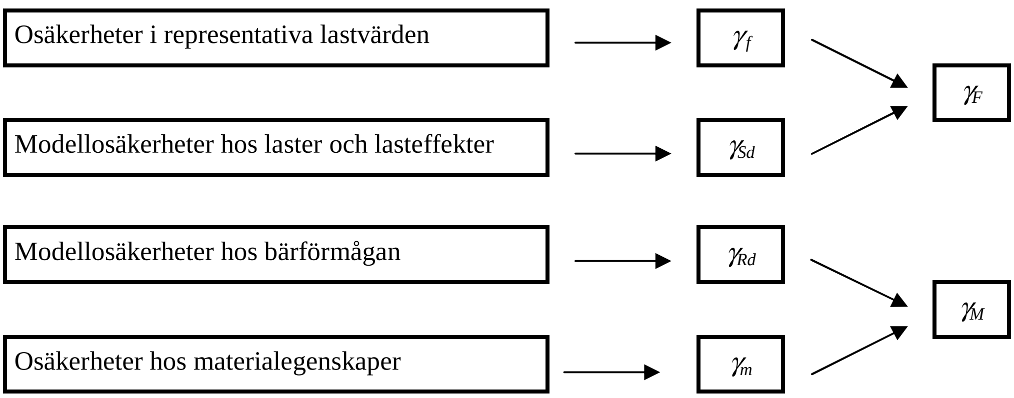
Skillnaderna är ganska stora, cirka 20 %. Vår tidigare analys av överensstämmelsen mot normalfördelning och gumbelfördelning visade dock att gumbelfördelningen var ett bättre val.

4.2 Dimensionering genom provning

Denna bilaga i SS-EN 1990 beskriver metoder att dels bestämma en enskild statistisk egenskap och dels bärförmågemodeller som normalt består av flera statistiska egenskaper och som bildar en sk. bärförmågefunktion. Denna funktion kan vara mer eller mindre empiriskt konstruerad vilket gör att själva funktionen i sig innehåller en hel del osäkerheter.

4.2.1 Bestämning av enstaka statistisk egenskap

Detta avsnitt ger principerna för hur man utifrån provningsresultat kan bestämma en enstaka egenskap (t.ex. hållfasthet). Två metoder ges där den första metoden används för att bestämma karakteristiskt värde och den andra för att direkt bestämma ett dimensioneringsvärde. Skillnaden är att i den andra metoden inkluderas de osäkerheter som i dimensioneringen representeras av partialkoefficienten γ_m för materialvärden eller γ_f för lastvärden. Partialkoefficienterna för modellosäkerheter, γ_{Rd} eller γ_{Sd} inkluderas inte. Sambandet mellan osäkerheter och partialkoefficienter som de förhåller sig i Eurokoderna illustreras av figur 8.



Figur 8: Samband mellan enskilda partialkoefficienter, [2].

SS-EN 1990 ger grunderna för själva utvärderingsmetoden. Ytterligare information om utvärdering kan finnas i den Eurokod som behandlar själva egenskapen.

En provnings- eller mätningsserie resulterar i statistisk information om variabeln X på formen

$$X_i = \{ X_1, X_2, \ldots, X_n \}$$

Det skattade medelvärdet, den skattade standardavvikelsen och variationskoefficienten ges av

$$\mu_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_X)^2}$$

$$V_X = \frac{s_X}{\mu_X}$$

För en normalfördelad variabel beräknas det dimensionerande värdet enligt

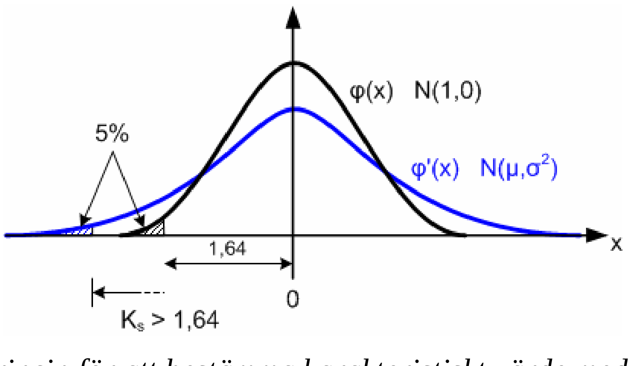
$$X_d = \eta_d \cdot \frac{X_k}{\gamma_m}$$

Där η_d är dimensioneringsvärdet för omräkningsfaktorn som tar hänsyn till volym och skaleffekter, fukt och temperatureffekter samt andra relevanta parametrar. Det karakteristiska värdet X_k ges av

$$X_k = \mu_X \cdot (1 - k_n V_X)$$

Där k_n beror av aktuell fraktil, i detta fall 5 %, antal mätvärden n och om V_X är känd, se tabell 6.

Generellt kan sägas att ju större statistiskt underlag som man har desto bättre. För ett mycket stort antal observationer, säg n > 100, är osäkerheterna för det skattade medelvärdet och den skattade standardavvikelsen små och fördelningen kan antas vara representerad av en normalfördelning, se den svarta kurvan i figur 9.



Figur 9: Princip för att bestämma karakteristiskt värde med hänsyn till osäkerhet i det statistiska underlaget.

Vanligtvis är antalet observationer begränsade vilket resulterar i en osäkerhet för det skattade medelvärdet och den skattade standardavvikelsen. Genom att ange en konfidensnivå som beror av antalet observationer och aktuell fraktil erhålls ett k-värde som alltid är större än motsvarande fraktil för normalfördelning, i figur 9 representerad av den blå kurvan.

Koefficienten k_n tar även hänsyn till om V_X är känd eller inte. Ofta kan man på ingenjörsmässiga grunder, dvs. tidigare erfarenhet från jämförbara situationer, förutsätta att V_X är känd.

Tabell 6: SS-EN 1990 tabell D1 - Värden på k_n för 5 % karakteristiska värden.

n	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
V_X känd	2,31	2,01	1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
V_X okänd	–	–	3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

Om variabeln är lognormalfördelad gäller att

$$\mu_{\ln X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$$

$$s_{\ln X} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i - \mu_X)^2}$$

$$X_k = e^{(\mu_{\ln X} - k_n s_{\ln X})} \approx \mu_X e^{-k_n V_X}$$

Som ett alternativ till bestämning av karakteristiskt värde kan dimensioneringsvärdet X_d bestämmas med direkt metod enligt följande

$$X_d = \eta_d \cdot \mu_X \cdot (1 - k_{d,n} V_X)$$

I detta fall bestäms $k_{d,n}$ enligt tabell 7. För ett stort antal prov motsvarar faktorn $k_{d,n}$ produkten $\alpha_R \cdot \beta = 0.8 \cdot 3.8 = 3.04$.

Tabell 7: SS-EN 1990 tabell D2 – Värden på $k_{d,n}$ för dimensioneringsvärden i brottgränstillstånd.

n	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
V_X känd	4,36	3,77	3,56	3,44	3,37	3,33	3,27	3,23	3,16	3,13	3,04
V_X okänd	–	–	–	11,40	7,85	6,36	5,07	4,51	3,64	3,44	3,04

Vid lognormalfördelning bestäms dimensioneringsvärdet enligt

$$X_d = \eta_d \cdot e^{(\mu_{\ln X} - k_{d,n} s_{\ln X})} \approx \eta_d \cdot \mu_X e^{-k_{d,n} V_X}$$

EXEMPEL: Antag att en gammal stålkonstruktion ska byggas om och stålsorten är okänd, misstanke finns att stålet är av sorten som tidigare benämndes SS1312. För att bestämma ett ingångsvärde (karakteristiskt värde) på det gamla stålets sträckgräns tas fyra representativa provstavar ut.

Dragprovningen av dessa ger

μ_R = 286 MPa

s_R = 15 MPa

$V_R = s_R / \mu_R = 0.05$

Där R representerar övre sträckgränsen R_{eH}. Då materialet är ett stål kontrolleras vad som sägs i SS-EN 1993-1-1 [3]. I kapitel 2.5 anges att det karakteristiska värdet ska bestämmas enligt formeln

$$R_k = R_d\, \gamma_{Mi}$$

där R_d är dimensioneringsvärden enligt bilaga D i SS-EN 1990

γ_{Mi} är rekommenderade partialkoefficienter.

För materialets sträckgräns kan antas att sträckgränsen har en lognormalfördelning, dvs.

$$R_d = \eta_d \cdot m_R \exp\left[-k_{d,n} V_R\right]$$

där

η_d = osäkerheter som inte omfattas av provningar, i detta fall antas 1.

$k_{d,n}$ = den normaliserade brottpunkten som med aktuellt konfidensintervall motsvarar produkten $\alpha\beta$ = 0.8·3.8 = 3.04.

Då det finns en hel del statistisk information angående sträckgränser för materialet SS1312 så kan vi på ingenjörsmässig grund påstå att variationskoefficienten är ”känd”, dvs. den är i den storleksordning som man kan förvänta sig. Därmed kan värdet $k_{d,n}$ = 3.44 direkt tas ur tabell D2 i SS-EN 1990 och sträckgränsens dimensioneringsvärde beräknas

$$R_d = 1.0 \cdot 286 \exp\left[-3.44 \cdot 0.05\right] = 241\,\mathrm{MPa}$$

För γ_M = 1.0 blir

$$R_k = 241\ \mathrm{MPa}$$

4.2.2 Statistisk bestämning av bärförmågemodeller

I SS-EN 1990 ges en metod för att kalibrera bärförmågemodeller och bestämma dimensioneringsvärden genom provning. Metoden är beskriven i sju steg och i det följande ges en sammanfattning av metoden med ett exempel.

Steg 1: Utveckla en dimensioneringsmodell

Först antas en bärförmågemodell, en funktion, på formen

$$r_t = g_{rt}(\overline{X})$$

där $\overline{X}$ representerar alla ingående stokastiska variabler, i SS-EN 1990 benämnda grundparametrar.

För varje prov som utförts har alla ingående grundparametrar mätts, det kan t.ex. vara materialegenskaper (hållfasthetsvärden) eller geometriska parametrar.

EXEMPEL: För att illustrera metoden ges ett fiktivt exempel. Antag att bärförmågefunktionen för en tryckt profil med komplicerat geometriskt tvärsnitt ska bestämmas.

För detta syfte har 30 provkroppar tillverkats. Den karakteristiska bärförmågan beräknas enligt funktionen

$$N_{Rk} = \kappa\, A\, f_{yk}$$

där κ är en empiriskt beräknad reduktionsfaktor som beror av tvärsnittets geometri, A representerar tvärsnittsarea och f_{yk} sträckgräns.

I fortsättningen betraktas A och f_{yk} som stokastiska variabler medan κ antas vara en deterministisk variabel.

Innan provningen mäts grundvariablerna f_{yk} och A. Faktorn κ beräknas och den teoretiska bärförmågan r_t bestäms för varje provkropp enligt den antagna bärförmågefunktionen.

Steg 2: Jämför experimentella och teoretiska värden

I tabellen nedan redovisas värden på de ingående variablerna, resultat av de teoretiska, r_t, och experimentella, r_e, bärförmågevärdena.

Tabell 8: Uppmätt indata och bärförmåga, r_e, samt teoretiskt beräknad bärförmåga, r_t.

nr.	*fy* [MPa]	*A* [mm2]	κ [-]	*rt* [kN]	*re* [kN]
1	399	1123	0.665	298.0	285.6
2	396	1060	0.665	279.3	303.4
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
29	398	1723	0.902	618.7	698.1
30	404	1605	0.902	585.4	626.6

Stålsorten är S355 och mätningarna ger följande statistiska data för grundvariablerna f_y och A.

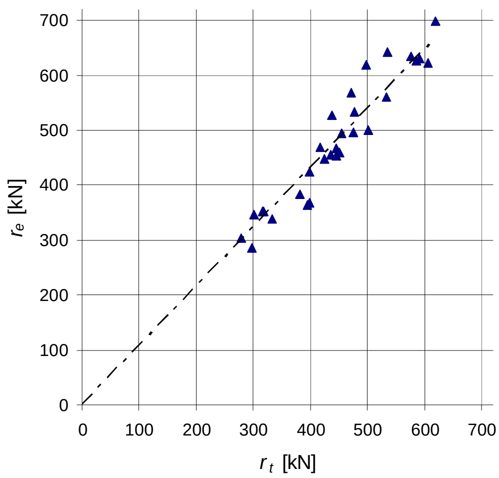
$$m_{fy} = 1.12 \cdot f_{yk}$$

$$V_{fy} = 0.07$$

$$m_A = 1.0 \cdot A$$

$$V_A = 0.02$$

Ett enkelt sätt att analysera beräkningsmodellen är att plotta de teoretiska beräkningsvärdena mot de experimentella värdena, se tabell 10.



Figur 10: r_t - r_e diagram.

I detta fall bildar punkterna en hyfsat rak linje med jämn spridning. Är spridningen ojämn eller stor bör bärförmågemodellen ses över och justeras.

Steg 3: Uppskatta sannolikhetsmodellens korrektionsfaktor

Den probabilistiska beräkningsmodellen kan beskrivas av uttrycket

$$r = b\, r_t\, \delta$$

där δ är feltermen och b medelvärdet på förhållandet mellan r_t och r_e. Detta förhållande bestäms med minsta-kvadratmetoden enligt uttrycket

$$b = \frac{\sum r_e r_t}{\sum r_t^2}$$

Steg 4: Uppskatta felens variationskoefficient

För varje experimentellt värde bestäms feltermen δ_i enligt

$$\delta_i = \frac{r_{ei}}{b\, r_{ti}}$$

Feltermen kan antas lognormalfördelad med medelvärdet 1 och variationskoefficienten som bestäms genom att definiera

$$\Delta_i = \ln(\delta_i)$$

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n}\sum \Delta_i$$

Den skattade variansen bestäms från

$$s_\Delta^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(\Delta_i - \bar{\Delta}\right)^2$$

Vilket ger följande variationskoefficient för feltermen

$$V_\delta = \sqrt{e^{s_\Delta^2} - 1}$$

I tabellen nedan ges resultatet av beräkning av korrektionsfaktorn b och feltermen δ för exemplet.

Tabell 9: Indata och beräkningsmall för prover.

	f_y	A	κ	r_t	r_e	$r_e \cdot r_t$	r_t^2	δ_i	Δ_i	$(\Delta_i - \bar{\Delta})^2$
nr.	[MPa]	[mm^2]	[-]	[kN]	[kN]	[kN^2]	[kN^2]	[-]	[-]	[-]
1	399	1123	0.665	298.0	285.6	85110	88819	0.887	-0.119	0.012
2	396	1060	0.665	279.3	303.4	84764	78031	1.006	0.006	0.000
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	398	1723	0.902	618.7	698.1	431958	382843	1.045	0.044	0.003
30	404	1605	0.902	585.4	626.6	366840	342702	0.991	-0.009	0.000
					$\Sigma =$	6742261	6243538	$\bar{\Delta} =$	-0.008	
						$b =$	1.080		$\Sigma =$	0.158
									$s_\Delta^2 =$	0.005
									$V_\delta =$	0.074

Steg 5: Analysera överensstämmelsen

Överensstämmelsen mellan provningspopulationen och de antaganden som gjorts för bärförmågefunktionen bör analyseras.

Är spridningen för stor för att erhålla ett ekonomiskt dimensioneringsvärde för bärförmågefunktionen så kan spridningen reduceras på olika sätt. Mer om detta finns beskrivet i SS-EN 1990.

Steg 6: Bestäm variationskoefficienterna för grundvariablerna

Om det kan påvisas att provningspopulationen är helt representativ för den verkliga variationen kan variationskoefficienterna V_{Xi} för grundvariablerna i bärförmågefunktionen bestämmas från provningsdata. Eftersom detta i allmänhet dock inte är fallet måste vanligtvis variationskoefficienterna V_{Xi} bestämmas på grundval av någon tidigare känd kunskap.

Steg 7: Bestäm det karakteristiska värdet r_{k} för bärförmågan

I exemplet är bärförmågefunktionen en produktfunktion på formen

$$r = b\ r_t\ \delta = b\ \{X_{fy}\ \cdot X_A\}\delta$$

Medelvärdet kan erhållas från

$$m_r = b\ g_{rt}(\overline{X_i}) = b \cdot m_{fy} \cdot m_A = 1.08 \cdot 1.12\, f_{yk} \cdot 1.0A = 1.21 f_{yk} A$$

Om variationskoefficienterna är små gäller att bärförmågefunktionens variationskoefficient

$$V_r^2 = V_\delta^2 + V_{rt}^2 = 0.074^2 + 0.073^2 = 0.104^2$$

där

$$V_{rt}^2 = \sum V_{Xi}^2 = V_{fy}^2 + V_A^2 = 0.07^2 + 0.02^2 = 0.073^2$$

För mer komplexa bärförmågefunktioner hänvisas till SS-EN 1990.

Den karakteristiska bärförmågan ges av

$$r_k = m_r\, e^{\left(-k_\infty \alpha_{rt} Q_{rt} - k_n \alpha_\delta Q_\delta - 0{,}5Q^2\right)}$$

k_{n} är den karakteristiska fraktilfaktorn från tabell D1 för fallet V_{X} okänd i SS-EN 1990. För n = 30 gäller att k_{n} = 1.73.

k_∞ är k_{n}-värdet för $n \to \infty$, vilket ger att $k_\infty = 1.64$.

Q representerar den logaritmerade standardavvikelsen och α viktfaktorn enligt följande

$$Q_{rt} = \sqrt{\ln\left(V_{rt}^2 + 1\right)} = 0.073$$

$$Q_\delta = \sqrt{\ln\left(V_\delta^2 + 1\right)} = 0.074$$

$$Q = \sqrt{\ln\left(V_r^2 + 1\right)} = 0.103$$

$$\alpha_{rt} = \frac{Q_{rt}}{Q} = \frac{0.073}{0.103} = 0.70$$

$$\alpha_\delta = \frac{Q_\delta}{Q} = \frac{0.074}{0.103} = 0.71$$

vilket i exempel ger

$$r_k = m_r \, e^{\left(-k_\infty \alpha_{rt} Q_{rt} - k_n \alpha_\delta Q_\delta - 0,5 Q^2\right)} =$$
$$= 1.21 f_{yk} A \cdot e^{(-1.64 \cdot 0.70 \cdot 0.073 - 1.73 \cdot 0.71 \cdot 0.074 - 0.5 \cdot 0.103^2)} = 1.01 f_{yk} A$$

Det beräknade karakteristiska bärförmågevärdet representerar 5 % fraktilen. En direkt jämförelse med den funktion som beskriver den karakteristiska bärförmågefunktionen för N_{Rk} visar en avvikelse på 1 %. Vi kan således konstatera att den antagna bärförmågefunktionen uppfyller kraven och kan användas för dimensionering med partialkoefficientmetoden.

5 SAMMANFATTNING

Sannolikhetsteoretiska metoder kan användas för direkt kontroll i ett givet gränstillstånd, dvs. genom att betrakta alla ingående variabler och osäkerheter på både last- och bärförmågesidan som statistiska variabler och beräkna brottrisken. Metoden i sig är ganska matematiskt komplicerad och kräver ett omfattande statistiskt underlag. I de flesta fall är det inte lönt då den eventuella förtjänsten i de flesta fall är liten mot den arbetsinsats som krävs.

För dimensionering av stora och komplicerade anläggningar kan i vissa fall en sannolikhetsteoretiskt baserad metod vara ekonomiskt fördelaktig. Men som sagt, metoden är komplicerad och det återstår en del utvecklingsarbete innan de sannolikhetsteoretiska metoderna blir så tillgängliga att de finner en mer allmän tillämpning för direkt dimensionering av byggkonstruktioner.

En annan tillämpning för sannolikhetsteoretiska metoder är att använda dem för kalibrering av faktorer och koefficienter som ingår i deterministiska beräkningsmodeller som bygger på partialkoefficientmetoden. I bilaga C till eurokoden SS-EN 1990 [2] ges anvisningar för hur kalibreringen kan utföras. Denna eurokod ger även en hel del andra informativa anvisningar för metoder kopplade till sannolikhetsteoretiskt synsätt, bl.a. hur karakteristiska eller dimensionerande bärförmågevärden kan bestämmas med provning.

Vid arbete med sannolikhetsteoretiskt baserade metoder ställs stora krav på utföraren. Många val ska göras rörande modellernas funktioner, statistisk information och osäkerheter. Ofta är det brist på information och valen måste därför baseras på ingenjörsmässiga bedömningar. Det kan till exempel gälla hur stor spridningsparameter som ska antas för en variabel där den tillgängliga informationen är bristfällig. Det kan i dessa fall vara enkelt att lägga sig på ”mycket säkra sidan” vilket resulterar i ofördelaktiga resultat. Med en god ingenjörsmässig bedömning kan valet av spridningparameter baseras på annan jämförbar information och eventuella osäkerheter beaktas genom tidigare erfarenheter.

En annan svårighet kan vara att välja en representativ fördelning för den aktuella stokastiska variabeln. Valet kan även i detta fall göras på en ingenjörsmässig bedömning baserad på tidigare statistisk erfarenhet av lasten, egenskapen eller osäkerheten

REFERENSER

[1] Cajot, L.G., Haller, M., Conan, Y., Sedlacek, G., Kraus, O., Rondla, J., Cerfontaine, F., Lagerqvist, O., Johansson, B., Probailistic quantification of safety of a steel structure highlighting the potential of steel versus other materials. Final report RFCS-Contract No 7210-PR/315, Report EUR 21695 EN, Brussels, 2005.

[2] Eurokod SS-EN 1990:2002 Eurokod – Grundläggande dimensioneringsregler för bärverk.

[3] Eurokod SS-EN 1993-1-1:2005 Eurokod 3 del 1-1– Dimensionering av stålkonstruktioner.

[4] Hasofer, A.M., Lind, N.C., Exact and Invariant Second Moment Code Format. Journal of engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 100, 1974, pp. 111-121.

[5] ISO 2394:2002 General principles on reliability for structures.

[6] Joint Committee on Structural Safety, JCSS Probabilistic Model Code, part I-IV. 12th draft. Se även http://www.jcss.ethz.ch/publications/publications_pmc.html

[7] Thoft-Christensen, P., Baker, M.J., Structural Reliability Theory and its Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[8] NKB Committee and Work Reports 1999:01 E, Basis of Design of Structures – Proposals for Modification of Partial Safety Factors in Eurocode.

[9] NKB-rapport nr. 35, Retningslinier for last- og sikkerhedsbestemmelser for baerende konstruktioner., Nordiska kommittén för byggbestämmelser, 1978.

[10] Stenström H., Sannolikhetsteoretisk dimensionering av stomkonstruktioner. Examensarbete LTU-EX-08/043- -SE, Luleå Tekniska Universitet, 2008.